

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{r^2 - R_1 R_2}{r(R_1 + R_2) - 2R_1 R_2}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} V = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{R_1 R_2}{r^2}}{R_1 + R_2 - \frac{2R_1 R_2}{r}}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)}$$

63) Eq. de Poisson

$$\text{lap } V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Comprende a expressão com a que foi obtida no caso de um fio infinito de carga linear  $\lambda$

mas, num cond. em eq. eletr. não  $\rho = 0 \Rightarrow$

concluímos que  $\text{lap } V = 0$  [eq. de Poisson]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{o potencial elétrico só depende de } r)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{dV}{dr} = K_1$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{K_1}{r} \Rightarrow V = K_1 \ln \frac{1}{r} + K_2 = K_1 \ln r + K_2$$

Condições fronteira:  $V(R_1) = V_1$  e  $V(R_2) = V_2$

$$V_1 = K_1 \ln R_1 + K_2 = V_1 \Rightarrow (V_1 - V_2) = K_1 \ln \frac{R_1}{R_2}$$

$$V_2 = K_1 \ln R_2 + K_2 = V_2 \Rightarrow K_1 = - \frac{(V_1 - V_2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Por outro lado

$$K_2 = V_1 - K_1 \ln R_1 = V_1 + \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln R_1$$

$$K_2 = \frac{V_1 \ln \frac{R_2}{R_1} + V_2 \ln R_1 - V_2 \ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{V_1 \ln R_2 - V_2 \ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

O campo também é radial

$$\vec{E}^e = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dn} \vec{u}_n$$

Portanto, uma das placas cria o campo  $E^e = \frac{q_1}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$  e a outra cria o campo

$$\vec{E}^e = -\frac{d}{dn} \left( -\frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln n + \frac{V_1 - V_2}{K_2} \right) \vec{u}_n = \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{n} \vec{u}_n$$

(b) O campo electrostático no espaço entre os condutores é

$$\vec{E}^e = \frac{V_1 - V_2}{n \ln \frac{R_2}{R_1}} \vec{u}_n$$

Comparando esta expressão com a que foi obtida no caso de um fio infinito de carga linear  $\lambda$

$$E^e(n) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 n}$$

concluímos que

$$\lambda = \frac{(V_1 - V_2) 2\pi\epsilon_0}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$$

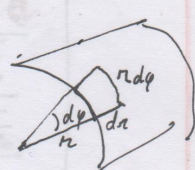
(c) Vimos nas aulas teóricas que

$$W_e = \int w d\tau = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 |\vec{E}^e|^2 d\tau$$

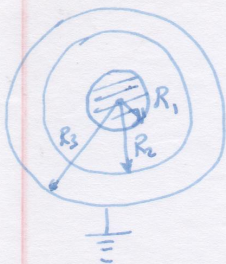
é a energia total armazenada pelo campo electrostático num volume  $V$ .

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2} \iiint \frac{1}{n^2} dz dy r dr = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 \epsilon_0} \int_{z=0}^l \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=R_1}^{R_2} dz dy \frac{dr}{n}$$

$$\frac{W_e}{l} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 \epsilon_0} l 2\pi \ln \frac{R_2}{R_1} = \left( \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)$$



27



(a) Sabere que o campo dentro do tubo é zero

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{u}_r$$

$$V(P_1) - V(P_2) = \int_{R_1}^{R_2} (\vec{E} \cdot d\vec{C}) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$C = \frac{q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) l} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

(c) Primo 1:  $W_c = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2) = \frac{1}{2} (q_1 V_1 - q_1 V_2)$

( $q_2 = -q_1$ )  $W_c = \frac{1}{2} q_1 (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} (\lambda l) \left( \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \right)$

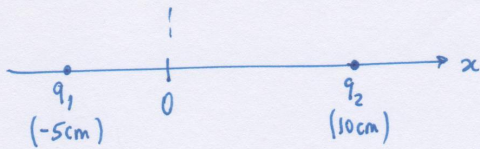
$$\frac{W_c}{l} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Primo 2:  $W_c = \frac{1}{2} \iiint \epsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^l \frac{dr d\phi dz}{r^2}$

$$W_c = \frac{\lambda^2 \epsilon_0 2\pi l}{8\pi\epsilon_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda^2 l}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

39)

b)



$$q_1 = 4 \mu\text{C}$$

$$q_2 = -2 \mu\text{C}$$

$$m_1 = m_2 = 10 \text{ g}$$

$$\vec{F}_{12}^e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{u}_{12}$$

$$\mathcal{E}^e = \Delta W_e = -\Delta K$$

$$-\int_{V_1^i}^{V_1^f} q_1 (V_1^f - V_1^i) = \frac{1}{2} m_1 (v^2 - 0) \Rightarrow \frac{1}{2} q_1 \left( \frac{-q_2}{4\pi\epsilon_0 x_0} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 x_i} \right) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 m_1} \left( \frac{-1}{x_0} + \frac{1}{x_i} \right)} = 9.8 \text{ m/s} \Rightarrow \vec{v}_1 = 9.8 \hat{u}_x \text{ (m/s)}$$

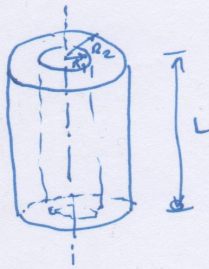
a) Na razão de simetria, a tendência a que as massas não fiquem, o ponto de colisão dividirá a meio do percurso em  $x = 2.5 \text{ cm}$

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0 \Rightarrow \Delta x_1 = -\frac{m_2}{m_1} \Delta x_2$$

$$(x_f - x_{10}) = -(x_f - x_{20}) \Rightarrow x_f = \frac{x_{10} + x_{20}}{2}$$

$$x_f = \frac{-5 + 10}{2} = \frac{5}{2} \text{ cm} = 2.5 \text{ cm}$$

51)



Use o Teorema de Gauss.

$$\oint_{sc} (\vec{E} \cdot \vec{n}) = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}^e = 0 \quad \text{se } r < R_1$$

$$\text{se } R_1 < r < R_2$$

$$E^e(P) 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} q_{int}(r)$$

~~$$E^e(P) = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\rho 2\pi r L}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\rho L}{2\epsilon_0 r}$$~~

$$E^e(P) 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} \rho (V(r) - V_1)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \rho (\pi r^2 L - \pi R_1^2 L)$$

↑ tanto por subtrair o volume interno de raio  $R_1$ , que está vazio!

$$E^e(P) = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} (r^2 - R_1^2)$$

• se  $r \geq R_2$

$$E^e(P) 2\pi r L = \frac{\rho}{\epsilon_0} (\pi R_2^2 L - \pi R_1^2 L) \Rightarrow E^e(P) = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r} (R_2^2 - R_1^2)$$

se  $\rho = \text{const}$

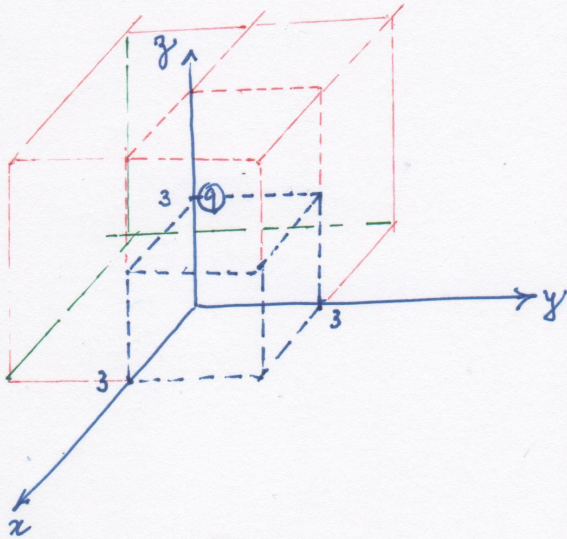
$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{2\pi r L} = \frac{q(r)}{2\pi r L}$$

$$q(r) = Q \frac{r}{R} = \rho \frac{2\pi r L}{R}$$

$$= \rho 2\pi r L$$

48

será bem mais fácil usar aqui argumentos de simetria. Lembre que podemos construir em torno da carga  $q$  um conjunto de  $6 \times 4$  cubos imaginários.



O fluxo do campo eletrostático através de uma das faces exteriores é

$$\Phi^e = \oint_{S_e} (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = 6 \text{ faces} \times 4 \text{ cubos} \\ = 24 \frac{\Phi^c}{\text{face}} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\Phi^c}{\text{face}} = \frac{1}{24} \frac{q}{\epsilon_0}$$

mas sendo metade apenas metade de face  $\Rightarrow \Phi^c = \frac{1}{2} \frac{\Phi^c}{\text{face}} = \frac{1}{48} \frac{q}{\epsilon_0}$ .

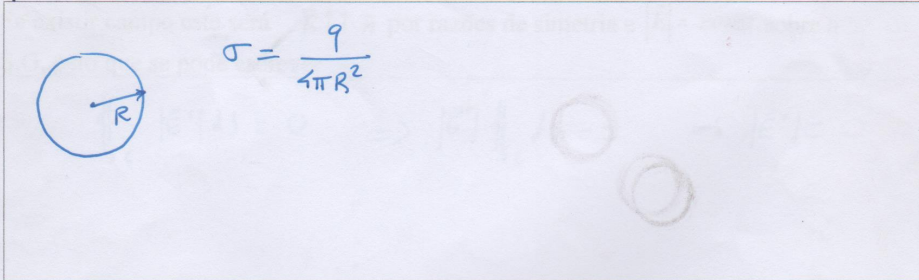
**Condições de aplicabilidade:**

- i) É preciso conhecer a priori a direcção e o sentido do campo  $\vec{E}^e$  em todos os pontos do espaço;
- ii) É preciso conhecer a priori a forma de uma superfície (*superfície de Gauss*) que passe pelo ponto P e sobre a qual  $|\vec{E}^e| = \text{Const.}$

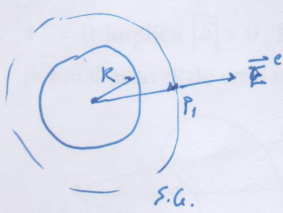
Infelizmente não se pode usar o Teorema de Gauss na determinação do campo  $\vec{E}^e$  criado por um disco de raio R, uniformemente eletrizado com  $\sigma$  (mesmo que seja num ponto sobre o eixo).



**Exemplo 49:** Esfera de raio R, uniformemente eletrizada em superfície com uma carga q.




O campo num ponto P1 (exterior) é obtido por

  $\oint_{S.G.} (\vec{E}^e \cdot \vec{n}) ds = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$   
 $(\vec{E}^e \uparrow \uparrow \vec{n})$   
 $\oint_{S.G.} |\vec{E}^e| ds = \frac{q}{\epsilon_0}$   
 ~~$(|\vec{E}^e| = \text{const. sobre a superfície de Gauss (S.G.)}$   
 $|\vec{E}^e| 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$~~

$|\vec{E}| = \text{const.}$  sobre a superfície de Gauss (S.G.)

$$|\vec{E}'| \oint_{S.G.} ds = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}'| 4\pi n^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$
$$|\vec{E}'| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{n^2} \quad \vec{E}'(P_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{n^2} \frac{\vec{r}_{P_1}}{r_{P_1}^3}$$

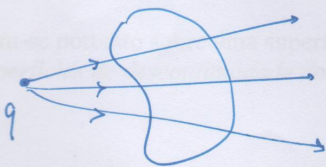
O campo num ponto  $P_2$  (interior) será dado por


$$\oint_{S.G.} (\vec{E}' \cdot \vec{n}) ds = 0$$

Se existir campo este será  $\vec{E} \uparrow \vec{n}$  por razões de simetria e  $|\vec{E}| = \text{const.}$  sobre a S.G., pelo que se pode escrever

$$\oint_{S.G.} |\vec{E}'| ds = 0 \Rightarrow |\vec{E}'| \oint_{S.G.} ds = 0 \Rightarrow |\vec{E}'| = 0$$

Note-se que neste caso  $\phi^e = 0 \Rightarrow |\vec{E}'| = 0$  por razões de simetria, mas nem sempre  $\phi^e = 0$  implica  $|\vec{E}'| = 0$ . Por exemplo, no caso do fluxo do campo criado por uma carga pontual através de uma superfície fechada que não envolva a carga:



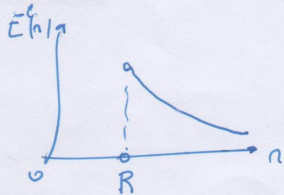
$$\phi^e = 0 \quad \text{mas} \quad |\vec{E}'| \neq 0$$

Vê-se que  $\phi^e = 0$ , mas  $|\vec{E}| \neq 0$ .

Tem-se portanto assim, no caso do problema da esfera uniformemente eletrizada em superfície:

$$\vec{E}^e(P) = E^e(r) \vec{grad}_p r$$

$$E^e(r) = \begin{cases} 0 & , r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} & , r > R \end{cases}$$

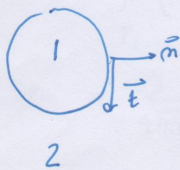


O campo é descontínuo sobre a superfície.

Note que o campo é descontínuo sobre a superfície.

### Descontinuidades das componentes do campo $E^e$

Se chamarmos agora (1) ao interior e (2) ao exterior da superfície e definirmos vectores unitários normal ( $\vec{n}$ ) e tangencial ( $\vec{t}$ ) à superfície, tem-se



$$E_1^e = 0 \Rightarrow E_{1n}^e = E_{1t}^e = 0$$

$$E_{2t}^e = 0$$

$$E_{2n}^e = E^e(R^+) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

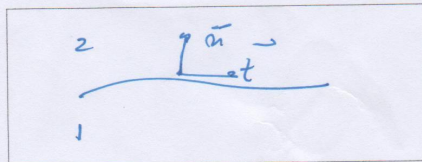
pois  $q = 4\pi R^2 \sigma$

Tem-se portanto sobre uma superfície eletrizada as seguintes condições fronteira em superfícies de descontinuidade do campo eléctrico:



$$E_{2t}^e - E_{1t}^e = 0$$

$$E_{2n}^e - E_{1n}^e = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Estas relações são absolutamente gerais, embora aqui tenham sido deduzidas no caso particular deste problema.

**Descontinuidades das componentes do campo electrostático sobre uma superfície eletrizada**

$$E_{2t}^e - E_{1t}^e = 0$$

$$E_{2n}^e - E_{1n}^e = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

**Potencial eléctrico para o caso da esfera de raio R uniformemente eletrizada em superfície**

$P_1$  — ponto exterior

$$V(P_1) = \int_{P_1}^{\infty} (\vec{E}^e \cdot d\vec{p}) \quad , \text{ se } V(\infty) = 0$$

$$V(P_1) = \int_{P_1}^{\infty} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{n^2} \vec{grad}_{P_1} n \cdot d\vec{p} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_{P_1}^{\infty} \frac{dn}{n^2}$$

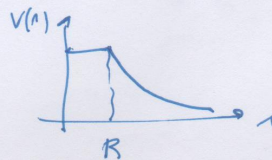
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{n} \right]_{P_1}^{\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{n}$$

$P_2$  — ponto interior

$$V(P_2) = \int_{P_2}^{\infty} (\vec{E}^e \cdot d\vec{p})$$

$$V(P_2) = \int_{P_2}^R (\vec{E}^e \cdot d\vec{p}) + \int_R^{\infty} (\vec{E}^e \cdot d\vec{p}) = 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$


$$V(n) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} & , n \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{n} & , n \geq R \end{cases}$$



**Exemplo 55:** Para esclarecermos este ponto vamos de propósito considerar o caso de uma distribuição em superfície, para vermos que o resultado aplica-se igualmente.

Assim, seja uma esfera de raio  $R$  uniformemente eletrizada em superfície com uma densidade  $\sigma$ .

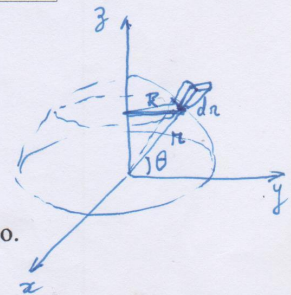
[13]



$$q = 4\pi R^2 \sigma$$

Já vimos que o campo  $\vec{E}^e$  é dado por  $\vec{E}^e = E^e(r) \cdot \text{grad} \vec{r}$ , com

$$E^e(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, & r > R \end{cases}$$



Segundo Maxwell a energia “reside” no exterior da esfera, pois é aí que há campo. Tem-se portanto

[14]

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{\text{exterior}} \epsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2} \iiint_{\text{exterior}} \epsilon_0 \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 dV$$

$$dV = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

$$R = \sin\theta \, r$$

$$dV = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

Onde  $dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$  é o elemento diferencial de volume.

Contudo, a integração em  $\theta$  e  $\phi$  pode fazer-se imediatamente, sendo  $dV = 4\pi r^2 dr$

[15]

$$W_e = \frac{1}{2} \int_R^\infty \epsilon_0 \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Podemos obter o mesmo resultado se fizermos o integral sobre as cargas. No caso da

distribuição em superfície tem-se  $W_e = \frac{1}{2} \iint_S \sigma V dS$ . O potencial da esfera é, como já

vimos, dado por

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}, & r \leq R, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, & r > R. \end{cases}$$

No integral o potencial que interessa é o potencial sobre as cargas, isto é, para  $r=R$ :

[16]

$$W_e = \frac{1}{2} V(R) \oint_S \sigma dS = \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} q = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Podemos agora sistematizar as equações fundamentais do campo electrostático:

(17)

$$1) \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$2) \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$3) E_x^x - E_y^y = 0$$

$$4) E_x^x - E_y^y = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$5) \vec{E} = -\operatorname{grad} V$$

$$6) \operatorname{div} \vec{v} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$7) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_x - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_x = 0$$

$$8) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_x - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_x = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- A eq. (1) diz que o campo  $\vec{E}$  não tem fontes de circulação, é irrotacional (o que é uma consequência do campo ser conservativo);

- A eq. (2) diz que o campo  $\vec{E}$  tem fontes de fluxo nas cargas;

- A eq. (3) é a condição de continuidade da componente tangencial do campo  $\vec{E}$  sobre uma superfície eletrizada (deberia ter sido o mesmo caso da eq. (2), mas aqui como os deslocamentos a partir da condição de continuidade da componente tangencial do campo sobre uma superfície eletrizada (deberia ter sido o mesmo caso da eq. (2), mas aqui foi estabelecida também a partir do resolução do problema);

- A eq. (4) é a condição de continuidade da componente normal do campo sobre uma superfície eletrizada (deberia ter sido o mesmo caso da eq. (2), mas aqui foi estabelecida também a partir do resolução do problema);

- A eq. (5) é a relação de ligação entre  $\vec{E}$  e  $V$ , de definição de potencial, e estabelece que o campo  $\vec{E}$  é conservativo;

- A eq. (6) é outra forma diferente de exprimir a eq. (2), ambas chamadas de equação de Poisson;

- Finalmente, as equações (7) e (8) envolvem as derivadas direcionais de  $V$ , sendo análogas que

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

Por último, as equações (1)-(2) combinadas com a lei de Coulomb, obtendo-se respectivamente:

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = 0 \quad \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \left( \vec{E} \text{ de Gauss} \right)$$